ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 1.

I.

Кратныя точки и касательныя алгебраическихъ кривыхъ (*).

(Статья I-ая).

§ 1. Общее уравненіе *n-ой* степени между двумя перемѣнными есть

$$\left.\begin{array}{l} A \\ + Bx + Cy \\ + Dx^2 + Exy + Fy^2 \\ + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ + Px^n + Qx^{n-1}y + \ldots + Rxy^{n-1} + Sy^n = o. \end{array}\right\} \quad (1)$$

въ которомъ, какъ легко видѣть, число членовъ есть сумма ариѳметической натуральной прогрессіи

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Общее уравненіе мы иногда будемъ писать въ сокращенной формѣ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n = o, \ldots\ldots (2)$$

гдѣ u_0 означаетъ абсолютный членъ, u_1, u_2, . . . u_n означаютъ однородные члены въ x и y, *1 ой, 2-ой, 3-ей,* и *n-ой* степени.

Иногда мы будемъ употреблять общее уравненіе въ однородной формѣ или въ три-линейныхъ координатахъ, введя третье перемѣнное z, такъ чтобы уравненіе было однородное, именно:

$$u_0 z^n + u_1 z^{n-1} + u_2 z^{n-2} + \ldots\ldots + u_{n-1} z + u_n = o \ldots (3)$$

Очевидно, что число членовъ въ этомъ послѣднемъ одинаково съ числомъ членовъ въ предъидущемъ.

§ 2. Если мы общее уравненіе преобразуемъ въ полярное, подставляя ϱ Cos. Q, ϱ Sin. Q вмѣсто x и y, то получимъ уравненіе *n-ой* степени въ ϱ, коего корни будутъ разстоянія n точекъ отъ начала, въ которыхъ прямая, проведенная черезъ начало и составляющая уголъ Q съ осью x, пересѣкаетъ кривую.

§ 3. Если въ общемъ уравненіи абсолютный членъ $A = o$, то начало находится на кривой, ибо уравненіе удовлетворяется, положивъ $x = o$, $y = o$.

Тоже самое видимъ и изъ уравненія выраженнаго въ полярныхъ координатахъ

$$(B \text{ Cos } Q + C \text{ Sin } Q)\,\varrho +$$
$$+ (D \text{ Cos}^2 Q + E \text{ Cos } Q \text{ Sin } Q + F \text{ Sin}^2 Q)\,\varrho^2 + \ldots = o, \quad (4)$$

которое дѣлится на ϱ, слѣдовательно одинъ изъ корней его долженъ быть $\varrho = o$, какова бы ни была величина Q; т. е. одна изъ n точекъ, въ которыхъ каждая прямая проведенная чрезъ начало пересѣкаетъ кривую, совпадаетъ съ началомъ.

Остальныя $(n-1)$ точекъ вообще отличны отъ начала; но есть такая величина угла Q, при которой и вторая точка совпадетъ съ началомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если Q удовлетворяетъ уравненію

$$B \text{ Cos } Q + C \text{ Sin } Q = o, \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

то общее уравненіе сдѣлается

$$(D \text{ Cos}^2 Q + E \text{ Sin } Q . \text{ Cos } Q + F \text{ Sin}^2 Q)\,\varrho^2 + \ldots = o, \quad (6)$$

оно дѣлится на ϱ^2, слѣдовательно два изъ его корней $\varrho = o$. И такъ прямая соотвѣтствующая этой величинѣ Q, пересѣкаетъ кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ, или она есть *касательная* въ началѣ.

Какъ уравненіе (5) даетъ только одну величину $Tg.\ Q$, то слѣдуетъ, что чрезъ данную точку на кривой вообще можно провести одну только касательную. Ея уравненіе очевидно есть

$$\varrho\,(B \text{ Cos } Q + C \text{ Sin } Q) = o, \text{ или } Bx + Cy = o.$$

Откуда видимъ, что если уравненіе кривой есть

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n = o$$

(начало координатъ находится на кривой), то

$$u_1 = o$$

будетъ уравненіемъ касательной въ началѣ.

(*) Руская математическая литература такъ бѣдна, что до сихъ поръ я не встрѣтилъ ни одного сочиненія трактующаго объ алгебраическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ; между тѣмъ какъ Западная Европа имѣетъ неизчерпаемыя сокровища, которыми она обязана новѣйшимъ изслѣдованіямъ геометровъ Гесси, Келе (*Cuyley*), Сольману и др.

По этому я думаю, что Вы найдете неизлишнимъ помѣстить слѣдующую статью въ журналѣ, съ помощію котораго вы имѣете благую мысль сообщать русской математической публикѣ то что дѣлается въ математическомъ мірѣ западной Европы и въ нашемъ отечествѣ, составляющемъ, до сихъ поръ единственное исключеніе. Я думаю, что каждый русскій геометръ долженъ сочувствовать вашему предпріятію и по возможности силъ своихъ его поддерживать.

Въ настоящей статьѣ я намѣренъ говорить объ особенныхъ точкахъ и особенныхъ касательныхъ, придерживаясь вполнѣ изложенія Сольмана въ его классическомъ сочиненіи „on the higher plane curves.“

Ващенко-Захарченко.

Если $B=o$, то ось X будетъ касательная, а если $C=o$, то ось $У$.

§ 4. Если теперь положимъ, что $A=o$, $B=o$ и $C=o$, то кофиціентъ у ϱ будетъ$=o$, какова бы ни-была величина угла Q; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, *каждая прямая* проведенная чрезъ начало пересѣкаетъ кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ съ началомъ.

Начало въ этомъ случаѣ называется *двойною точкою.*

Легко видѣть, какъ въ предъидущемъ параграфѣ, что въ этомъ случаѣ, чрезъ начало можно провесть прямую пересѣкающую кривую въ трехъ совпадающихъ точкахъ съ началомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть Q обращаетъ кофиціентъ у ϱ^2 въ o т. е. пусть

$$D \operatorname{Cos}^2 Q + E \operatorname{Sin} Q . \operatorname{Cos} Q + F \operatorname{Sin}^2 Q = o,$$

общее уравненіе будетъ дѣлиться на ϱ^3, а слѣдовательно три его корня $\varrho=o$. Для опредѣленія $Tg.\ Q$ мы здѣсь имѣемъ квадратное уравненіе, слѣдовательно чрезъ *двойную* точку мы можемъ провести двѣ прямыя линіи, пересѣкающія кривую въ трехъ совпадающихъ точкахъ съ началомъ; ихъ уравненіе есть:

$$\varrho^2 (D \operatorname{Cos}^2 Q + E \operatorname{Sin} Q . \operatorname{Cos} Q + F \operatorname{Sin}^2 Q) = o,$$

или
$$Dx^2 + Exy + Fy^2 = o.$$

Изъ сказаннаго видимъ, что хотя каждая прямая, проходящая чрезъ двойную точку, можетъ быть названа касательною (ибо каждая изъ нихъ пересѣкаетъ кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ), но есть двѣ прямыя, которыхъ соприкосновеніе тѣснѣе прочихъ,такъ что обыкновенно говорятъ, что въ двойной точкѣ можно провесть двѣ касательныя къ кривой. Если уравненіе кривой (начало находится въ двойной точкѣ) будетъ

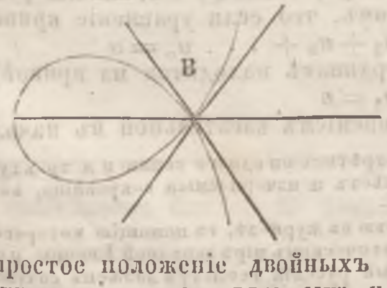
$$u_2 + u_3 + \ . \ . \ . \ = o,$$

то $u_2=o$ будетъ уравненіемъ пары касательныхъ въ началѣ.

§ 5. Необходимо различать три рода двойныхъ точекъ, смотря по тому будутъ ли прямыя выраженныя уравненіемъ $u_2=o$ дѣйствительныя, совпадающія, или мнимыя.

1-ое. Въ первомъ случаѣ касательныя обѣ дѣйствительны, двойная точка, или *узелъ* происходитъ отъ пересѣченія двухъ вѣтвей кривой, изъ коихъ каждая имѣетъ собственную касательную. Онѣ представлены на фигурѣ:

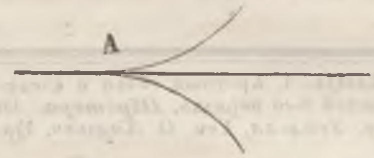
Ф. 1.



Самое простое положеніе двойныхъ точекъ мы находимъ въ уравненіяхъ составленныхъ изъ произведенія двухъ уравненій низшихъ степеней, какъ $U=PQ$; уравненіе $U=o$ представляетъ двѣ кривыя $P=o$ и $Q=o$. Но если мы будемъ ихъ разсматривать, какъ составную кривую *n-ой* степени, то она имѣетъ pq двойныхъ точекъ (пересѣченіе кривыхъ $P=o$, $Q=o$), въ каждой двойной точкѣ очевидно есть двѣ касательныя, именно, касательная къ $P=o$ и касательная къ $Q=o$.

2-ое. Уравненіе $u_2=o$ можетъ быть полнымъ квадратомъ, въ этомъ случаѣ касательныя въ двойной точкѣ совпадаютъ и кривая будетъ формы:

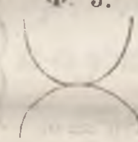
Ф. 2.



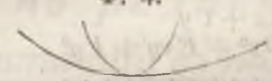
Такая точка называется *носкомъ*, или точкою *возврата*, ибо еслибы кривыя были образованы движеніемъ точки, то въ этой точкѣ движеніе начинается въ противуположную сторону, точка возвращается.

Этой точки нельзя пояснить, какъ въ предъидущемъ параграфѣ, положивъ что кривая $U=o$ состоитъ изъ двухъ кривыхъ $P=o$, $Q=o$, которыя касаются какъ на фигурахъ:

Ф. 3.



Ф. 4.



ибо, хотя точка соприкосновенія будетъ двойная, въ которой касательныя совпадаютъ, но здѣсь особенность точки будетъ высшаго порядка; въ этихъ точкахъ касательная пересѣкаетъ составную кривую въ четырехъ послѣдовательныхъ, или совпадающихъ точкахъ— именно въ двухъ каждую изъ составныхъ кривыхъ; между тѣмъ какъ въ точкѣ *возврата* касательная пересѣкаетъ кривую только въ трехъ совпадающихъ точкахъ. Чтобы касательная въ точкѣ возврата не пересѣкала кривую въ четырехъ послѣдовательныхъ точкахъ, недостаточно чтобы u_2 было полнымъ квадратомъ; но еще необходимо, чтобы его квадратный корень былъ множителемъ въ u_3 т. е. чтобы уравненіе кривой было формы:

$$v_1^2 + v_1 v_2 + u_4 + \ . \ . \ . \ . = o.$$

Такія точки (Ф. 3, 4.) происходятъ изъ соединенія двухъ двойныхъ точекъ, что легко замѣтить изъ примѣра выше даннаго: ибо если кривыя $P=o$, $Q=o$, касаются, то точка касанія замѣняетъ двѣ точки пересѣченія.

3-ое. Уравненіе $u_2=o$ можетъ имѣть оба корня мнимые.

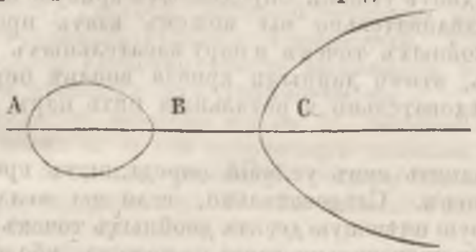
Въ этомъ случаѣ нѣтъ дѣйствительныхъ точекъ сосѣднихъ началу, которое теперь называется *сопряженною точкою.* Координаты начала удовлетворяютъ уравненію; но оно представляется не лежащимъ на кривой, такъ что только показавъ, что каждая прямая проведенная чрезъ эту точку можетъ пересѣчь кривую еще не больше какъ въ $(n-2)$ точкахъ, мы убеждаемся что точка находится на кривой.

§ 6. Пояснимъ сопряженныя точки слѣдующимъ примѣромъ. Возмемъ кривую:

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c),$$

гдѣ $a < b$ и $c > b$. Очевидно, что эта кривая симметрически расположена по обѣ стороны оси X, ибо каждой величинѣ x соотвѣтствуютъ двѣ равныя съ противными знаками величины y. Кривая пересѣкаетъ ось X въ точкахъ $x=a$, $x=b$, $x=c$. Когда $x < a$, то y^2 есть величина отрицательная, слѣдовательно y будетъ мнимое, y^2 дѣлается положительнымъ для величинъ x между a и b, отрицательнымъ для величинъ между b и c, и наконецъ положительнымъ для всѣхъ величинъ большихъ c. Слѣдовательно кривая состоитъ изъ овала лежащаго, между A и B и вѣтви начинающейся въ C и распространяющейся за C неопредѣленно.

Ф. 5.



Положимъ, что $b=c$, то уравненіе сдѣлается

$$y^2=(x-a)(x-b)^2$$

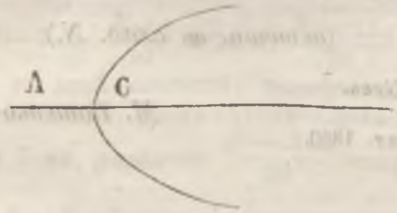
гдѣ $b > a$. Точка B теперь совпала съ C, овалъ соединился съ безконечною вѣтьвью и точка B сдѣлалась двойною (см. Ф. 1).

Съ другой стороны положимъ $a=b$, уравненіе сдѣлается:

$$y^2=(x-a)^2(x-c),$$

гдѣ $a < c$; овалъ обращается въ одну точку A, а кривая имѣетъ форму:

Ф. 6.



Этотъ примѣръ достаточно показываетъ аналогію между сопряженными точками и двойными, въ которыхъ касательныя дѣйствительны. Если мы положимъ $a=b=c$, то уравненіе будетъ

$$y^2=(x-a)^3,$$

точка A дѣлается точкою возврата (см. Ф. 2); и касательная въ ней пересѣкаетъ кривую въ трехъ совпадающихъ точкахъ.

§ 7. Если въ общемъ уравненіи $A, B, C, D, E, F, =o$, то начало будетъ тройная точка, каждая прямая проходящая чрезъ начало пересѣчетъ кривую въ трехъ совпадающихъ точкахъ; и легко видѣть, какъ прежде, что въ тройной точкѣ можно провесть три касательныя къ кривой, которыя выражаются ур-іемъ $u_3=o$.

Мы будемъ также различать, какъ прежде, три рода тройныхъ точекъ, смотря потому будутъ ли (1) три касательныя дѣйствительны и отмѣнны одна отъ другой, (2) одна дѣйствительная и двѣ совпадающихъ, (3) всѣ три совпадающія, или (4) одна дѣйствительная, а двѣ мнимыя. Послѣдній родъ точекъ не отличается отъ другихъ точекъ кривой.

Мы можемъ точно также изслѣдовать условія когда начало будетъ кратная точка высшаго порядка напр. *k-го.* Коефиціенты всѣхъ членовъ степени меньшей k должны уничтожиться, и уравненіе будетъ формы:

$$u_k+u_{k-1}+\ .\ .\ .\ .=o.$$

Въ этой кратной точкѣ можно провести k касательныхъ къ кривой, коихъ уравненіе будетъ

$$u_k=o.$$

Родъ кратныхъ точекъ будетъ зависѣть отъ корней этого уравненія, которые могутъ быть всѣ дѣйствительные и неравные; нѣсколько равныхъ, или мнимыхъ.

§ 8. Остается теперь опредѣлить предѣлъ того числа кратныхъ точекъ, которое кривая *n-ой* степени можемъ имѣть, если она не составлена изъ кривыхъ низшихъ степеней.

Кривая третей степени не можетъ имѣть двухъ двойныхъ точекъ; ибо прямая соединяющая такія точки пересѣкла бы кривую въ четырехъ точкахъ; а извѣстно, что въ кривой 3-ей степени больше трехъ точекъ на одной прямой лежать не можетъ, исключая того случая, когда кривая будетъ состоять изъ этой прямой и коническаго сѣченія.

Кривая четвертой степени не можетъ имѣть четырехъ двойныхъ точекъ; ибо еслибы она ихъ имѣла, то коническое сѣченіе проведенное чрезъ эти четыре точки и пятую произвольно взятую на кривой, пересѣклобы кривую въ девяти точкахъ, между тѣмъ, какъ онѣ могутъ только пересѣчься въ 2×4 точкахъ. И вообще, кривая *n-ой* степени не можетъ имѣть болѣе $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойныхъ точекъ; ибо еслибы она имѣла одной больше, то чрезъ эти $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ и $n-3$ другихъ точекъ кривой, какъ извѣстно (см. *Аналит. Гео. Сомова* § 30), можно описать кривую $(n-2)$-ой степени, которая, въ этомъ случаѣ пересѣклась бы съ данною въ $2\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right\}+n-3$ точкахъ, или въ $n(n-2)+1$; что невозможно, если кривая не есть составная (*).

(*) Если точка пересѣченія двухъ кривыхъ будетъ двойная на одной изъ нихъ, то пересѣченіе мы должны считать за два. Если точка пересѣченія будетъ двойная на обѣихъ, то мы должны это пересѣченіе считать за четыре. И вообще, если точка пересѣченія будетъ кратная *k-го* порядка на одной изъ кривыхъ и *l-го* порядка на другой, то мы эту точку должны считать за kl пересѣченій. Такъ напримѣръ, система k прямыхъ линій пересѣкаетъ систему l прямыхъ въ kl точкахъ; но если всѣ прямыя первой системы пересѣкаются въ одной точкѣ то эта точка считается за k пересѣченій, и линіи могутъ еще пересѣчься только въ $k(l-1)$ точкахъ. Если и второй системы прямыя пересѣкутся въ тойже точкѣ, то она будетъ считаться за kl пересѣченій и прямыя нигдѣ больше не пересѣкутся.

Если кривыя касаются въ точкѣ пересѣченія, то точки касанія будутъ считаться за два пересѣченія, что очевидно Если точка пересѣченія будетъ кратная на одной изъ кривыхъ, или обѣихъ, и если одна изъ касательныхъ въ кратной точкѣ будетъ общая обѣимъ кривымъ, то къ числу пересѣченій въ кратной точкѣ мы должны еще прибавить единицу, ибо кромѣ общихъ точекъ, число которыхъ мы выше показали, онѣ имѣютъ еще но-

§ 9. Точно также мы можемъ опредѣлить предѣлъ числа кратныхъ точекъ высшихъ порядковъ, которыя данная кривая можетъ имѣть. Такъ напримѣръ, если кривая *n-ой* степени имѣетъ кратную точку $n-1$-го порядка, то она другой кратной имѣть не можетъ; ибо еслибы она имѣла, то прямая соединяющая эти точки пересѣкла бы кривую больше чѣмъ въ n точкахъ. Если кривая *n-ой* степени имѣетъ кратную точку $(n-2)$-го порядка, то она можетъ имѣть еще только двойныя, и легко показать какъ въ пред. §, что таковыхъ она можетъ имѣть неболѣе числа $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Легко приложить тоже правило къ какому угодно соединенію кратныхъ точекъ различныхъ порядковъ; но нелегко подвести результатъ подъ одну общую форму. Вышесказанное показываетъ, что кривая не можетъ имѣть больше извѣстнаго числа кратныхъ точекъ, но не показываетъ сколько именно.

§ 10. Мы можемъ показать, что когда кривая имѣетъ наибольшее число кратныхъ точекъ, то вообще существуетъ извѣстная зависимость между ними, такъ что давъ положеніе извѣстнаго числа мы опредѣлимъ положеніе остальныхъ.

Покажемъ, что данная двойная точка на кривой тождественна тремъ условіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ эту точку за начало, мы видимъ что три члена уравненія уничтожаются и мы имѣемъ въ нашемъ распоряженіи тремя постоянными меньше,слѣдовательно двойная точка заступаетъ мѣсто трехъ условій. Еслибы были даны и касательныя въ двойной точкѣ, то мы бы имѣли двумя условіями больше, ибо $A=o$, $B=o$, $C=o$, и еще $\frac{E}{D}$, $\frac{F}{D}$ должны быть даны.

Тройная точка заступаетъ мѣсто, какъ легко видѣть, шести условій и вообще k кратная точка заступаетъ мѣсто $\frac{k(k+1)}{2}$ условій.

слѣдовательную общую точку на одной изъ вѣтвѣй проходящихъ чрезъ кратную точку. Легко видѣть дѣйствіе какого нибудь соединенія касательныхъ и кратныхъ точекъ.

Легко теперь видѣть, что три точки произвольно взятыя могутъ быть двойными точками на кривой 4-ой степени, ибо онѣ заступаютъ мѣсто девяти условій. Но касательныя въ этихъ точкахъ не могутъ быть произвольно взяты, ибо мы будемъ, въ этомъ случаѣ, имѣть пятнадцать условій, а кривая четвертой степени опредѣляется четырнадцатью, слѣдовательно должно существовать условіе, связывающее эти касательныя; и въ самомъ дѣлѣ мы увидимъ ниже, что эти шесть касательныхъ касаются одного коническаго сѣченія, такъ что давъ пять, шестая опредѣляется.

Двадцать условій опредѣляютъ кривую пятой степени. Слѣдовательно мы можемъ взять произвольно шесть двойныхъ точекъ и пару касательныхъ въ одной изъ нихъ, этими данными кривая вполнѣ опредѣляется, а слѣдовательно и остальныя пять паръ касательныхъ.

Двадцать семь условій опредѣляютъ кривую шестой степени. Слѣдовательно, если мы желаемъ описать кривую имѣющую десять двойныхъ точекъ, то больше девяти произвольно взять не можемъ, ибо эти девять точекъ вполнѣ опредѣляютъ кривую и можетъ случиться, что кривая не будетъ имѣть десятой, слѣдовательно должно существовать условіе,связывающее десять двойныхъ точекъ.

Точно также и въ кривыхъ высшихъ степеней, когда онѣ имѣютъ наибольшее число двойныхъ точекъ, то онѣ связаны еще большимъ числомъ условій. Исключая случая кривой четвертой степени, мы не пробовали выразить геометрически эти зависимости, а вѣроятно существуютъ любопытныя теоремы, которыя остается еще открыть.

(*окончан. въ слѣд. N.*)

Кіевъ. 15-го Окт. 1860.

М. Ващенко-Захарченко.

Zwei Satze uber Oberflachen zweiter Ordnung

Von Hern Professor Dr. H. Schröter (*).

I. Wenn man durch einen Punct P im Raume vier beliebige Stralen $a, b, c, d,$ und durch einen anderen Punct Q vier beliebige Ebenen A, B, C, D, legt und letztere den ersteren in irgend einer Weise zuordnet, so dass a und A, b und B u. s. w. sich entsprechen, so erhalt man vier Schnittpuncte S je zwei entsprechender Elemente; ferner bestimmen die Stralen a und b eine Ebene und die beiden ihnen entsprechenden Ebenen A und B schneiden sich in einer Geraden, welche jener Ebene (a, b) in einem Puncte t begegnet; solcher Puncte t giebt es 6, so oft vier Elemente zu je zweien sich kombiniren lassen. Die beiden Puncte P und Q, die vier Puncte S und die sechs Puncte t liegen alle 12 zusammen in derselben Oberfläche zweiter Ordnung.

II. Wenn man durch einen Punct P im Raume drei beliebige Stralen a, b, c und durch einen andern Punct Q drei beliebige Ebenen A, B, C legt und letztere den ersteren in irgend einer Weise zuordnet, so dass a und A, b

(*) Ich erhielt die obige Mittheilung in Begleitung folgender mir höchst angenehmer Zeilen, die ich mir hier abzudrucken erlaube: „Um Ihnen wenigstens einen Beweis zu liefern, wie gerne ich Ihr ernstes Streben zu unterstutzen bereit bin, füge ich eine kleine mathematische Mittheilung bei, die, so weit meine Literaturkenntnis reicht, neu ist und noch nicht von mir publicirt wurde. Wenn Sie es für passend erachten, dieselbe in Ihr Journal aufzunehmen,so steht Ihnen dieselbe zu Gebote.“ (Red.)

und B, c und C sich entsprechen, so erhalt man drei Schnittpuncte S sich entsprechender Elemente; ferner bestimmen a und b eine Ebene und A et B schneiden sich in einer Geraden, welche jener Ebene in einem Puncte t begegnet; solcher Puncte t erhalt man drei. Die beiden Puncte P und Q, die drei Puncte S und die drei Puncte t bilden allemal eine Gruppe von 8 solchen Puncten, dass jede Oberfläche zweiter Ordnung, die durch 7 derselben geht, auch durch den achten hindurchgehen muss.

Breslau. d. 7 Novemb. 1860.

Относительно дѣлимости чиселъ.

Всякому извѣстно, сколь неудобно испытаніе многоциферныхъ чиселъ относительно ихъ дѣлимости на 7 по общему способу, который впрочемъ помѣщается въ элементарныхъ курсахъ Арифметики. Слѣдующее, замѣчательное свойство чиселъ выражаетъ болѣе практическій признакъ ихъ дѣлимости на 7.

Ежели въ данномъ числѣ N, отбросимъ цифру единицъ напр. a. и изъ полученнаго такимъ образомъ числа D, вычтемъ удвоенную цифру единицъ т. е. $2a$; то ежели разность $D-2a$ дѣлится на 7, и все число N тоже дѣлится на 7.

Само собою разумѣется, что подобное испытаніе примѣняется и къ разности $D-2a$, и дѣйствіе повторяется до тѣхъ поръ пока не получится остатокъ очевидно или кратный, или некратный 7-ми. Это свойство, на которое обратилъ мое вниманіе г. *Гусевъ*, мнѣ удалось доказать слѣдующимъ образомъ.

Общій видъ числа изображеннаго по десятичной системѣ, есть слѣдующій:

$$N=a+b\times 10+c\times 10^2+d\times 10^3+\ldots\ldots\ldots$$

гдѣ $a, b, c, d, \ldots$ цифры не превосходящія 9. По предъидущему $D=b+c\times 10+d\times 10^2+\ldots=\frac{N-a}{10}$

и $$D-2a=\frac{N-a}{10}-2a=\frac{N-21a}{10}.$$

Такъ какъ въ этой разности, коефиціентъ передъ a т. е. 21 дѣлится на 7, то въ случаѣ ежели и N есть число кратное 7-ми, разность $\frac{N-21a}{10}$ непремѣнно раздѣлится на 7. И обратно, ежели разность $\frac{N-21a}{10}$ дѣлится на 7 то и N должно быть кратнымъ 7-ми.

Примѣчаніе. По причинѣ кратности 21 не только съ 7 но и съ 3, тоже самое свойство имѣютъ числа и относительно ихъ дѣлимости на 3, что легко повѣрить.

Вышеобъясненное свойство чиселъ относительно ихъ дѣлимости на 7 и на 3, повело меня къ изысканіямъ подобныхъ признаковъ дѣлимости и на другія числа, и я пришолъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1-ое. Число N дѣлится на другое число δ вида $10\,n+1$. какъ *напр.* 31, 51, 61, . . . ежели разность $D-na$ дѣлится на δ, ибо

$$D-na=\frac{N-a}{10}-na=\frac{N-(10\,n+1)\,a}{10}$$

2-ое. По предъидущему признаку можно испытывать дѣлимость чиселъ не только на числа вида: $10\,n+1$, но и на числа, кои суть дѣлителями чиселъ вида $10\,n+1$, т. е. на числа: p, удовлетворяющія сравненію,

$$10\,n+1\equiv o \text{ (мод. } p). \qquad (a)$$

Изъ теоріи сравненій извѣстно, что всякое число p простое съ 10 удовлетворяетъ сравненію (a), слѣдовательно, если для числа p простова съ 10, вычислимъ изъ сравненія (a), n, то получимъ то число, на которое слѣдуетъ умножать цифру единицъ въ N, дабы вычитать за тѣмъ полученное произведеніе изъ D.

Я вычислилъ n для всѣхъ простыхъ чиселъ отъ 7 до 101, и нашелъ:

для $p=7$, $n=2$
— $=11$, $=1$
— $=13$, $=9$ или (-4)
— $=17$, $=5$
— $=19$, $=17$ или (-2)
— $=23$, $=16$ или (-7)
— $=29$, $=26$ или (-3)
— $=31$, $=3$
— $=37$, $=11$
— $=41$, $=4$
— $=43$, $=30$
— $=47$, $=14$
— $=53$, $=37$
— $=59$, $=53$ или (-6)
— $=61$, $=6$
— $=67$, $=20$
— $=71$, $=7$
— $=73$, $=51$
— $=79$, $=71$ или (-8)
— $=83$, $=58$
— $=89$, $=80$
— $=97$, $=29$
— $=101$, $=10$ (*)

Для примѣра изслѣдуемъ число 949013 относительно его дѣлимости на 37. Для $p=37$, $n=11$, слѣдовательно, отдѣливъ цифру единицъ въ данномъ числѣ N, умножая оную на 11, и вычитая полученное произведеніе изъ D тогоже числа, а за тѣмъ поступая съ

(*) Непосредственная зависимость n отъ p очевидна, ибо какъ скоро p есть вида $10\,m\pm 1$, то $n=\pm m$; если же p вида $10\,m\pm 3$, то $n=\mp(m.3\pm 1)$, по этимъ формуламъ можно прямо написать n для какого угодно числа p. Можно вывести также подобныя значенія n' n'' подъ условіемъ что 2, 3, или болѣе послѣднихъ цифры числа N будутъ отдѣляемы и множимы на эти n' или n'' и т. д. При изысканіи простыхъ множителей многоциферныхъ чиселъ можетъ быть полезнымъ имѣть таблицу такихъ n, n', n'' упрощающихъ испытанія. Такъ напр. для $p=13$, $n''=1$, для $p=23$, $n''=2$, для $p=73$, $n'''=1$. и т. п. (прим. *Ред.*)

остаткомъ такимъ же образомъ, получимъ слѣдующее расположеніе дѣйствія:

949013
—33
94868
—88
9398
—88
851
—11
74

послѣдній остатокъ дѣлится на 37, слѣдовательно и данное число есть кратное 37-ми.

Изслѣдуемъ еще дѣлится ли число: 16701 на 19? Для $p=19$, $n=17$ или (-2); принимая $n=-2$, намъ слѣдуетъ удвоенныя цифры единицъ не вычитать а прибавлять къ D, и такимъ образомъ получимъ:

16701
+2
1672
+4
171
+2
19

Послѣдняя сумма есть 19, слѣдовательно и данное число дѣлится на 19.

Этихъ двухъ примѣровъ достаточно, дабы убѣдиться въ практичности выведенныхъ мною признаковъ дѣлимости, даже и на такія простыя числа, для которыхъ общій пріемъ не доставлялъ никакой выгоды. Особенно замѣчательны своею простотою признаки дѣлимости на слѣдующія простыя числа: 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 59, 61, 67, 71, 79, 89 и 101 (*).

Минскъ.

А. Жбиковскій.

26 Окт. 1860 г.

(*) Такъ какъ для $p=3$, $n=+2$ или -1, то употребляя послѣднее значеніе, настоящій способъ испытанія приводится къ обыкновенному, т. е. сложенію всѣхъ циферъ, составляющихъ данное число N.

прим. *Ред.*

III.

Извлеченіе изъ корреспонденціи.

1. *Отъ Проф. Зейделя изъ Мюнхена* (*21 Іюля и 19 Окт.*) Извѣстный своею изобрѣтательностію механикъ *Штейнгель* устроилъ въ послѣднее время трубу съ объективомъ, конструкція коего предложена была Гаусомъ и какъ извѣстно почитаема самимъ знаменитымъ Астрономомъ непримѣнимою къ практикѣ, ибо она приводитъ къ весьма короткимъ радіусамъ кривизны; въ слѣдствіе чего неточность изображенія и высшаго порядка становится чувствительною. Гаусовъ объективъ выполняетъ то условіе, что средина поля зрѣнія свободна отъ сферической аберраціи и что цвѣто-разсѣяніе уничтожается здѣсь какъ для средины такъ и для краевъ объектива; но главный недостатокъ послѣдняго заключается въ томъ, что если центральный и параллельный ему лучь, падающій на край объектива дѣйствительно соединяются въ фокусѣ, то въ тоже время лучь падающій въ небольшомъ удаленіи отъ средины значительно отклоняется. Между тѣмъ г. Штейнгель утверждаетъ, что этотъ важный недостатокъ ему удалось устранить незначительнымъ измѣненіемъ въ толстотѣ стеколъ и въ ихъ взаимномъ разстояніи, и что именно по причинѣ значительной кривизны поверхностей этаго объектива неизбѣжные въ практикѣ недостатки формы имѣютъ здѣсь меньшее вліяніе на точность изображенія, чѣмъ въ объективѣ Фрауенгофера. Первый опытъ кажется говоритъ въ пользу этаго утвержденія, а дальнѣйшія испытанія должны показать недостатки-ли въ устраненіи сферической аберраціи на краяхъ поля зрѣнія въ новомъ объективѣ, или несовершенство ахроматизма въ объективѣ Фрауэнгофера дѣйствуютъ вреднѣе на точность изображенія.

Проф. *Зейдель* оканчиваетъ въ настоящее время свой важный фотометрическій трудъ, въ которомъ будутъ представлены результаты сравненій приблизительно для 200 звѣздъ, сѣвернаго полушарія. Я еще не вправѣ теперь сдѣлать употребленіе изъ сообщенныхъ мнѣ на этотъ счетъ подробностей.

2. *Отъ Генерала Ходзько* (*30-го Іюля*) *изъ лагеря въ Дагестанѣ.* Начатая весною треангуляція сѣвернаго Кавказа продолжается успѣшно, и вѣроятно къ концу Октября будетъ проложена сѣть треугольниковъ отъ Дербента (опредѣленнаго прежнею треанг.) до соединенія съ треугольниками измѣренными отъ Астрахани до Кизляра Подполковникомъ *Васильевымъ*. Кромѣ того будетъ окончено нѣсколько первокласныхъ треугольниковъ между Влади-Кавказомъ и Кизляромъ. Составляется подробное описаніе Араратской экспедиціи 1850 г., для коего уже окончены вычисленія барометрическихъ и геодезическихъ измѣреній.

3. *Отъ Пр. Брунса изъ Лейпцига* (*19 Сент.*) Новая Мадритская Обсерваторія устроена по образцу Пулковской, она владѣетъ двумя прекрасными инструментами: меридіаннымъ кругомъ Репсольда и рефракторомъ Мерца въ 16 футовъ фокусной длины. Зданіе новой Лейпцигской Обсерваторіи (на сооруженіе которой и пріобрѣтеніе инструментовъ асигновано 22000 талеровъ) будетъ окончено въ чернѣ до наступленія зимы. Для нея заказанъ уже гальваническій регистраторъ по образцу Виленскаго (*) и другой такойже приборъ изготовляет-

(*) Описаніе этаго прибора будетъ помѣщено въ одномъ изъ ближайшихъ NN.

ся тѣмъ же г-мъ Аусфельдъ въ Готѣ для новаго экваторіала Гансена. (*)

4. *Von A. Murmann, Assistenten der K. k. Sternwarte* zu Wien. (6. Dec.)

»Bei der Lektüre Ihres Aufsatzes »*Ueber die Gestalt des Mondes*« in den uns jüngst zugekommenen, Bülletins der St. Petersburger Akademie, drängte sich mir eine Bemerkung auf, die ich mir erlauben mögte, Ihnen mitzutheilen.

»Es ist seit den Versuchen von *Wheatstone* im J. 1852 bekannt, dass sich 2 Bilder stereoscopisch kombiniren lassen, wenn auch die Richtungen, nach welchen diese Bilder Projektionen des Objects sind, einen Winkel einschliessen, der verschieden ist von demjenigen Winkel, welchen die Augenaxen bei sterescopischer Bertachtung des Reliefbildes einschliessen: und zwar erscheint, wenn ersterer Winkel kleiner ist, als letzterer, das Relief verflacht, wenn grösser, übertrieben. Die durch Ihre Messungen an zwei Photographien des Mondes gewonnene Abweichung der Mondoberfläche v. der Kugelgestalt, müsste ihrer Grösse wegen sich wohl gewiss im stereoscopischen Relief manifestiren; um aber zu erfahren, ob dieses den Mond nicht noch zu flach, oder schon zu erhaben erscheinen lässt, wäre noch die folgende kleine Rechnung nothwendig:

»Bezeichnet i die Librationsdifferenz der beiden Photographien des Mondes, p die Brennweite der Linsen des Stereoscops, d die Entfernung der Photographien von diesen, so wird nach *Sutton*, wenn man den Abstand der Augen von einander zu 2½ Zoll annimmt, — das im Stereoscop erscheinende Relief des Mondes

verflacht sein, wenn $2,5\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{p}\right) > i$

richtig — — — — — — $= i$

übertrieben — — — — — $< i$

Sollen Ihre Photographien die Mondoberfläche im stereoscopischen Relief richtig erscheinen lassen, so müssen die Strahlen (angenommen, wie in dem Aufsatze $i = 9^0\ 44'$) aus dem hinzu verwandten Stereoscop so austreten, als kämen sie aus einer Entfernung gleich nahe 15 Zoll.“

Ich setze zu dieser interessanten Bemerkung hinzu, dass auch in einem Steroscope in welchem d=4, 6 Zoll und p=6, 9 Zoll ist, also sehr nahe das richtige Relief nach obigen Formeln sich zeigen muss, der Mond so stark eiförmig erscheint, dass es jedem Beobachter in's Auge fällt und im Vergleich zu dem Resultate meiner Untersuchung in dem oben erwähnten Aufsatze noch als übertrieben angesehen werden muss. Indessen bemerke ich, dass man bekanntlich bei jedem stereoscopischen Bilde, nachdem man es länger ansicht, eine viel entferntere Perspective zu entdecken glaubt. Diese Erscheinung kann man wohl phisiologisch dadurch erklären, dass die Pupillen der beiden Augen in Folge einer Anstrengung näher zu einander gebracht werden.

М. Г.

(*) Описаніе этаго инструмента уже получено мною, отъ Г-на Гансена и будетъ напечатано вѣроятно въ 3-мъ N. *Ред.*

IV.

О вліяніи мѣстныхъ условій на образованіе грозъ.

Во время послѣдняго съѣзда Нѣмецкихъ Естествоиспытателей въ Кенигсбергѣ, Профессоръ *Фельдъ* сдѣлалъ интересное указаніе относительно зависимости въ распредѣленіи числа грозъ отъ мѣстныхъ условій.—Число грозъ вообще уменьшается съ приближаніемъ къ полюсу и по его мнѣнію 72-й град. сѣверной широты можно почитать крайнимъ предѣломъ появленія грозъ въ нашемъ полушаріи (*). Но степень уменьшенія числа грозъ съ широтою не одинакова для стараго и новаго материковъ; въ Америкѣ оно идетъ быстрѣе, чѣмъ въ Европѣ, при томъ въ послѣдней, при равныхъ географическихъ широтахъ, вообще тѣмъ менѣе грозъ чѣмъ мѣсто лежитъ восточнѣе. Такъ на западныхъ берегахъ Франціи среднимъ числомъ въ теченіе года бываетъ 21 гроза, въ средней Германіи 19, въ Варшавѣ 16, въ Петербургѣ 12, въ Казани всего только 9 (**). Берега моря нарушаютъ по видимому эту постепенность въ географическомъ распредѣленіи грозъ; такъ напр. южныя прибрежья Балтійскаго моря считаютъ столько же грозъ, какъ и западныя берега Франціи. Но это нарушеніе въ общемъ законѣ географическаго распредѣленія грозъ, равно какъ и вообще чрезвычайно огромное число послѣднихъ, приходящееся на долю Пруссіи, Пр. Фельдъ объясняетъ мѣстными условіями, а именно обиліемъ внутреннихъ озеръ, которыя въ одной провинціи *Пруссіи* занимаютъ 71 кв. милю.—Статистическія данныя о числѣ пораженныхъ молніею людей, собираемыя въ Пруссіи служатъ подтвержденіемъ обилія грозъ въ этой странѣ. Такъ, въ теченіе 4-хъ лѣтъ отъ 1854 до 1858 г. число несчастныхъ случаевъ этого рода достигло здѣсь огромной цифры 511, найбольшая доля коей по отношенію къ населенію приходится на восточную часть Пруссіи, по преимуществу изобилующую озерами. По мнѣнію Пр. Фельда, именно здѣсь всего лучше обнаруживается это вліяніе, ибо другихъ мѣстныхъ причинъ не существуетъ: цѣлая страна есть равнина, едва возвышающаяся мѣстами отъ 600 до 1000 футовъ надъ поверхностію моря; между тѣмъ извѣстно, что надъ сухою равниною не могутъ образоваться грозныя тучи.

Мнѣ кажется, что замѣчаніе г. Фельда имѣетъ основаніе и можетъ быть оправдано наблюденіями въ другихъ мѣстностяхъ. Сравнивая данныя о числѣ грозъ для нѣкоторыхъ пунктовъ Россіи, собранныя г. Весселовскимъ, нельзя не замѣтить вообще сравнительное обиліе грозъ въ сѣверо-западной части Имперіи, столь богато надѣленной внутренними озерами и относительно малое число оныхъ въ степныхъ пространствахъ южной Россіи. Можно сказать что Сѣверъ и Югъ Евро-

(*) Извѣстно что г. Миддендорфъ наблюдалъ грозы въ Таймырской землѣ даже за 73° сѣв. шир.

(**) Болѣе подробныя данныя относительно этого предмета, для значительнаго числа пунктовъ въ Европѣ находятся въ обширномъ сочиненіи Г. *Весселовскаго* „О Климатѣ Россіи“.

пейской Россіи одинаково богаты грозами и эту абнормальность можно объяснить только мѣстными условіями, а именно, что кажется наиболѣе вѣроятнымъ, весьма неравномѣрнымъ распредѣленіемъ внутреннихъ озеръ, а также и лѣсовъ. Само собою разумѣется, что для болѣе основательнаго изслѣдованія вліянія мѣстныхъ причинъ на число грозъ необходимо имѣть данныя, обнимающія значительныя пространства и продолжительный періодъ времени. Но такъ какъ непосредственныя наблюденія надъ обиліемъ грозъ въ возможно большемъ числѣ пунктовъ представляютъ весьма значительныя затрудненія уже по самой неопредѣленности счисленія, а именно въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣсколько отдѣльныхъ грозъ слѣдуютъ непосредственно одна за другою, или происходятъ въ такомъ отдаленіи и въ такое время дня, что легко могутъ ускользнуть отъ внимательности наблюдателя; то мнѣ кажется, что для разъясненія вліянія мѣстныхъ условій, какъ вопроса еще совершенно неразработаннаго, намъ также необходимо, по крайней мѣрѣ предварительно обратиться къ статистическимъ даннымъ. Офиціальныя „Вѣдомости о необыкновенныхъ происшествіяхъ",—между проч. о числѣ убитыхъ молніею людей и животныхъ, а равно поврежденныхъ, или истребленныхъ оною строеній, также о буряхъ, наводненіяхъ и градобитіяхъ,— которыя доставляются обыкновенно по два раза въ мѣсяцъ къ Начальникамъ всѣхъ Губерній, представляютъ намъ уже готовый, вообще легко доступный и безъ сомнѣнія стоющій изслѣдованія матеріалъ для сравнительной климатологіи Россіи.—Единственно съ цѣлію обратить вниманіе на этотъ предметъ, я позволяю себѣ привести здѣсь для примѣра числа пораженныхъ молніею людей, извлеченныя мною изъ упоминаемыхъ »Вѣдомостей» за послѣдніе семь лѣтъ для 4-хъ западныхъ губерній. Эти числа суть: для губ. Ковенской 54, Виленской 46, Гродненской 63 и Минской 62; всего 225, или среднимъ числомъ на одинъ годъ на пространствѣ этихъ 4-хъ губерній приходится 32 случая этого рода. (*) Подобное среднее годичное число для Пруссіи есть 128, т. е. ровно въ четыре раза болѣе 32-хъ; но не должно упускать изъ виду, что послѣднее число приходится на долю въ 5 разъ меньшаго населенія (разсѣяннаго на пространствѣ составляющемъ около $3/4$ протяженія Пруссіи) и слѣдовательно; по отношенію къ послѣднему, случаи пораженія молніею людей въ нашихъ странахъ сравнительно еще чаще чѣмъ въ Пруссіи. Правда, что на пространствѣ 4-хъ губерній внутреннія, болѣе значительныя озера, по исчисленію Г. *Швейцера* (*Areal-Bestimmung des Kaiserreichs Russland*), занимаютъ всего только 7, 1 кв. мили; но стоитъ взглянуть напр. на спеціальныя карты Шуберта, дабы убѣдиться, что множество мелкихъ озеръ, разсѣянныхъ по Виленской и Ковенской губ. и обширныя болота Минской губ. представляютъ весьма большую водную поверхность, благопріятствующую образованію мѣстныхъ грозъ. Сосѣдство Пруссіи и Балтійскаго моря, конечно, также не остаются безъ вліянія на общее число грозъ въ нашихъ странахъ.

Не входя здѣсь въ подробное изложеніе собранныхъ мною данныхъ для 4-хъ губерній, ибо онѣ тогда только получатъ интересъ, когда могутъ быть сравнены съ подобными же числами, принадлежащими болѣе обширной и разнообразной по мѣстнымъ условіямъ поверхности, я замѣчу только въ заключеніе, что обнимая значительный періодъ времени, статистическія данныя могли бы дѣйствительно служить для раскрытія мѣстныхъ условій, благопріятствующихъ образованію и разряженію грозныхъ облаковъ. Такъ и въ приведенныхъ выше числахъ уже ясно обнаруживается преобладаніе случаевъ пораженія молніею людей въ болѣе южныхъ губерніяхъ, Минской и Гродненской. Послѣдняя, имѣя на $1/6$ долю слабѣйшее населеніе противъ Минской губ., представляетъ *maximum.* Числа, обнимающія болѣе продолжительный періодъ времени могли бы объяснить зависитъ ли указанное преимущество Гродненской губ., въ особенности передъ Виленскою, (имѣющею одинаковое съ нею населеніе) отъ обилія лѣсовъ, геогностическихъ свойствъ почвы, или отъ другихъ мѣстныхъ причинъ. Я думаю даже, что вліяніе мѣстныхъ причинъ можетъ обнаружиться этимъ путемъ и для болѣе тѣсныхъ пространствъ. Такъ напр. сличивъ числа пораженныхъ молніею людей за 16 послѣднихъ лѣтъ (1843 — 1859) для различныхъ уѣздовъ Виленской губерніи, я нашелъ:

для Виленскаго уѣзда	21.
— Ошмянскаго —	27.
— Свенцянскаго —	20.
— Трокскаго —	17.
— Вилейскаго —	21.
— Лидскаго —	9.
— Дисненскаго —	7.

Мнѣ кажется весьма вѣроятнымъ, что относительно малыя числа для 2-хъ послѣднихъ уѣздовъ также не суть случайныя.

15-го Декабря 1860 г.

М. Гусевъ.

Вильно.

(*) Я полагаю, что изъ всѣхъ данныхъ, относящихся къ метерологическимъ явленіямъ, наибольшее довѣріе заслуживаютъ числа пораженныхъ молніею людей; въ другихъ же случаяхъ, на пр. въ числахъ истребленныхъ молніею строеній часто нельзя знать сдѣлалось ли все показанное число строеній жертвою одного и тогоже пожара, или есть слѣдствіемъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ ударовъ молніи. Также желательно было бы знать при каждомъ случаѣ какое именно строеніе жилое или холодное было поражено молніею. Для 4-хъ губерній въ теченіи 7-ми лѣтъ число истребленныхъ молніею строеній: жилыхъ 378, а холодныхъ 1138. Преобладаніе числа послѣднихъ, конечно указываетъ только на сравнительную легкость истребленія оныхъ при каждомъ пожарѣ. Числа, выражающія пространства подвергшіяся градобитію конечно всего менѣе надежны.

Печатать позволяется Вильно 20 Декабря 1860 года. *Цензоръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А. Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*